EXERCICE 1: a) L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (3x^2 - 5y, 2x + y)$ est-elle linéaire ?
b) L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (2x + 3z, y - 5z)$ est-elle linéaire ?
c) L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y) = (2x, 3x + y, y - 5)$ est-elle linéaire ?

E, F deux espaces vectorielle

$f: E \to F$ est linéaire :⟺

$\forall \delta \in K \ \forall \vec{v} \in E : f(\delta \cdot \vec{v}) = \delta \cdot f(\vec{v})$

$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E : f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$

$\cdot : K \times V \to V$

$\left(\delta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$

a) f n'est pas linéaire.

$\delta = 2 \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f\left(\delta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\delta \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^2 - 5 \\ 2 \cdot 2 + 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 38 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f\left(\delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \neq \delta f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ f n'est pas linéaire

EXERCICE 1: a) L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (3x^2 - 5y, 2x + y)$ est-elle linéaire ?
b) L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (2x + 3z, y - 5z)$ est-elle linéaire ?
c) L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y) = (2x, 3x + y, y - 5)$ est-elle linéaire ?

Def. 1

$\cdot : K \times V \to V$

$\left(\delta, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \delta \cdot x_1 \\ \delta \cdot x_2 \\ \delta \cdot x_3 \end{pmatrix}$

Nous devons montrer:

$\forall \delta \in \mathbb{R} \ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f\left(\delta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \delta \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$

b) Soit $\delta \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$f\left(\delta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \delta \cdot x \\ \delta \cdot y \\ \delta \cdot z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \delta \cdot x + 3 \cdot \delta \cdot z \\ \delta \cdot y - 5 \cdot \delta \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \cdot (2x + 3z) \\ \delta \cdot (y - 5z) \end{pmatrix} =$

$= \delta \cdot \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ y - 5z \end{pmatrix}$

$= \delta \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ✓

Def 2:

$+ : V \times V \to V$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

Nous devons montrer:

$\forall \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{= \vec{v}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}_{= \vec{w}} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$

$f(\vec{v} + \vec{w}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) =$

$f(x, y, z) = (2x + 3z, y - 5z)$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (x_1 + x_2) + 3 \cdot (z_1 + z_2) \\ y_1 + y_2 - 5 \cdot (z_1 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + 2x_2 + 3z_1 + 3z_2 \\ y_1 + y_2 - 5z_1 - 5z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3z_1 + 2x_2 + 3z_2 \\ y_1 - 5z_1 + y_2 - 5z_2 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{Def. 2}}{=} \begin{pmatrix} 2x_1 + 3z_1 \\ y_1 - 5z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 + 3z_2 \\ y_2 - 5z_2 \end{pmatrix}$

=

=

=

$f(x, y, z) = (2x + 3z, y - 5z)$

$= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$ ✓

$\Rightarrow$ f est linéaire!

EXERCICE 2 :

Soit f linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $f(1,0) = (3,5,-2,8)$ et $f(0,1) = (-2,1,4,-1)$

Déterminer $f(x,y)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Une applicaton lineaire est uniquement determiné par les images des vecteur d'une base. et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \underset{f \text{ linéaire}}{=} x \cdot f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= x \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\-2\\8\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\4\\-1\end{pmatrix} \underset{\text{Def 1.}}{=} \begin{pmatrix}3 \cdot x\\5 \cdot x\\-2x\\8x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2y\\y\\4y\\-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-2y\\5x+y\\-2x+4y\\8x-y\end{pmatrix}$$

Def. 1

$$\cdot : K \times V \to V$$
$$\left(\delta, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix}\delta \cdot x_1\\\delta \cdot x_2\\\delta \cdot x_3\\\delta \cdot x_4\end{pmatrix}$$

$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3x-2y\\5x+y\\-2x+4y\\8x-y\end{pmatrix}$$